UNIVERSITE DES LAGUNES **ANNEE 2022-2023**
Licence 3
Faculté de Sciences et Technologie

Analyse Convexe : Fiche TD2

.

Exercice 1

Soit la fonction $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ avec $f(x) = \frac{1}{2} < Ax, x > - < b, x >$ ou A une matrice symétrique définie positive d'ordre n et $b \in \mathbb{R}^n$

1) Montrer que f est différentiable sur $\mathbb{R}^n$.
2) Calculer le gradient et la matrice Hessienne de f.
3) Montrer que f est convexe si et seulement si A est semi définie positive.
4) Montrer que f est strictement convexe si et seulement si A est définie positive.

.

Exercice 2

1) Soient les fonctions $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que f est convexe et g est convexe et croissante. Montrer que gof est convexe.
2) Si $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est linéaire, montrer que fog est convexe.
3) Montrer que $f(x,y) = (\mid 2x + 3y \mid + \mid x - y \mid)^p$ est convexe sur $\mathbb{R}^2$ pour $p \in]1, +\infty[$

.

Exercice 3

On s'intéresse au problème de minimiser la fonction f définie par :

$$f(x,y) = x^2 - 2x + y^4$$

sur le pavé $A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \leq x \leq 1/2, 0 \leq y \leq 2\} = [0, \frac{1}{2}] \times [0,2]$.

1. Montrer que A est convexe.
2. Prouver que f est convexe sur A.
3. Montrer qu'il existe une solution unique du problème (Indication : rappeler pourquoi A est compact).
4. Trouver la solution.

Exercice 4

Soit f la fonction définie par la formule $f(x) = x^{2k}$ pour $k \in \mathbb{N}^*$.

1. En calculant la dérivée seconde, montrer que f est strictement convexe sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$.
2. Montrer que f est strictement convexe sur $\mathbb{R}$.